Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences
Tétouan

Année Univ : 08 –09
SMA / SMI

TD de Mécanique

Série n°1

Exercice 1 : *Lundi*

Trouver l'angle aigu formé par les diagonales d'un quadrilatère de sommets $(0,0,0)$; $(3,2,0)$; $(4,6,0)$ et $(1,3,0)$.

Exercice 2 : *Samedi*

Trouver l'aire d'un tringle dont les sommets sont situés en $P(2,3,5)$, $Q(4,2,-1)$ et $R(3,6,4)$.

Exercice 3 : *Lundi*

Soit une fonction scalaire $f(x) = x^2yz^3$ et un vecteur $\vec{V} = xz\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + 2x^2y\vec{e}_z$.

Trouver : $\overrightarrow{\text{grad}}f$, $\text{div}\,\vec{V}$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$, et $\text{div}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$.

Exercice 4 : *Samedi*

Résoudre l'équation différentielle : $2\dot{y} - y = e^x$

Exercice 5 : *Lundi*

Un ressort de raideur K est horizontal, une de ses extrémités est fixe. On accroche à son autre extrémité un corps de masse m. Cette masse peut se déplacer le long d'un axe horizontal Ox. Soit O la position du corps à l'équilibre.

On admettra que les frottements se réduisent à une force de type fluide $\vec{f} = -h.\vec{V}$ où $\vec{V}$ désigne la vitesse instantanée du corps. Le coefficient h est positif.

1°) Etablir l'équation différentielle caractéristique du mouvement du solide.

2°) Donner l'allure de x(t) selon la valeur du coefficient d'amortissement $2\lambda = h/m$.

ETUSUP .com

Exercice 6 : *Samedi*

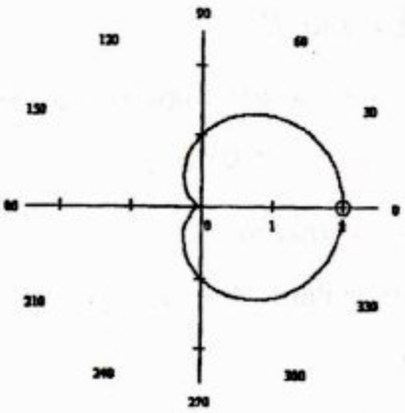
A l'instant t=0, un parachutiste de masse m se trouve en z=0, se déplace verticalement vers le bas avec une vitesse initiale v_0. On suppose que la force exercée par la résistance de l'air sur le parachutiste est proportionnelle à la vitesse.

1°) Calculer la vitesse, la distance parcourue, et l'accélération du parachutiste.

2°) Montrer que la vitesse du parachutiste tend vers une certaine limite.

Exercice 7 : (CCI 07-08)

On considère la courbe définie par l'équation polaire : $r = A(1 + \cos\theta)$, où A est une constante positive. Cette courbe est une ***cardioïde***.



Un point matériel M de masse m décrit cette courbe de telle manière que $\theta = \omega t$ (ω = cte). On prendra θ dans $[0, 2\pi]$.

Partie A :

1°) Calculez la vitesse $\vec{V}$ de M dans le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et représentez sur la courbe le vecteur vitesse aux points $\theta = 0, \pi/2$. *(1 pt)*

2°) Calculer $\|\vec{V}\|$ en fonction de r. *(1 pt)*

3°) Calculez l'accélération $\vec{\gamma}$ et représentez ce vecteur aux points $\theta = 0, \pi/2$. *(2 pts)*

Partie B :

On suppose le point M soumis à une unique force $\vec{F}$, responsable de ce mouvement.

1°) Donnez les composantes de $\vec{F}$ dans le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. *(1 pt)*

2°) Montrer que la puissance P(t) développée par $\vec{F}$ en un point quelconque de sa trajectoire $(= -mA^2\omega^3 \sin\omega t)$. *(1 pt)*

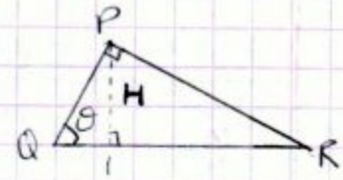
3°) Quel est le travail de $\vec{F}$ sur l'arc supérieur de la courbe (entre $\theta = 0, \pi$) ?. *(1 pt)*

4°) Retrouvez ce résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique. *(1 pt)*

ETUSUP .com

SERIE 1

EXERCICE 2



L'aire de triangle : $S = \dfrac{H.QR}{2}$

On a $H = \sin\theta . PQ$

Donc $S = \dfrac{\sin\theta . QP . QR}{2} = \dfrac{\|\vec{QP}\| . \|\vec{QR}\| . \sin(\widehat{\vec{QP}, \vec{QR}})}{2} = \dfrac{\|\vec{QP} \wedge \vec{QR}\|}{2}$

Avec $Q(4,2,-1)$; $P(2,3,5)$ et $R(3,6,4)$

on a : $\vec{QP}(-2,1,6)$ et $\vec{QR}(-1,4,5)$

$$\vec{QP} \wedge \vec{QR} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ -2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \vec{e_z} - \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \vec{e_y} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \vec{e_x}$$

$$= (-8+1)\vec{e_z} - (-10+6)\vec{e_y} + (5-24)\vec{e_x}$$

$$= -7\vec{e_z} + 4\vec{e_y} - 19\vec{e_x}$$

$$= -19\vec{e_x} + 4\vec{e_y} - 7\vec{e_z}$$

EXERCICE 4

$$2\dot{y} - y = e^x$$

→ On cherche la solution sans second membre $\Leftrightarrow 2\dot{y} - y = 0$

$$\Leftrightarrow 2\frac{dy}{dx} = y \Leftrightarrow 2\frac{dy}{y} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln y = \int \frac{dx}{2} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x + c$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\frac{1}{2}x + c} = e^{\frac{1}{2}x} . e^c$$

On pose : $\lambda = e^c \Rightarrow y = \lambda e^{\frac{1}{2}x}$

La solution particulière est donnée à l'aide de la méthode de la variation de la cte : $\lambda = \lambda(x)$

ETUSUP .com

$$2\left(\lambda' e^{x/2} + \lambda \cdot \frac{1}{2} e^{x/2}\right) - \lambda e^{x/2} = e^{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\lambda' e^{x/2} + \cancel{\lambda e^{x/2}} - \cancel{\lambda e^{x/2}} = e^{x} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda' = \frac{e^{x}}{2e^{x/2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda' = \frac{e^{x - x/2}}{2} = \frac{e^{x/2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = e^{x/2} + c_2$$

$$\Rightarrow \quad y = \lambda e^{x/2} = (e^{x/2} + c_2)\, e^{x/2} = e^{x} + e^{x/2} c_2$$

EXERCICE 6

(1) $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \quad \Leftrightarrow \quad mg\,\vec{e_z} - K.V\,\vec{e_z} = m\gamma\,\vec{e_z}$

$$\Leftrightarrow \quad mg - KV = m\frac{dV}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV}{dt} = g - \frac{K}{m}V \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{-K}{m}\left(V - \frac{mg}{K}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dV'}{dt} = \frac{-K}{m}V' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV'}{V'} = -\frac{K}{m}\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dV'}{V'} = -\frac{K}{m}\int dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln V' = -\frac{K}{m}t + cte \quad \Leftrightarrow \quad V' = \lambda e^{-K/m\, t}$$

On a : $V' = V - \frac{mg}{K} \quad \Leftrightarrow \quad V = V' + \frac{mg}{K}$

$$\Leftrightarrow \quad V = \lambda e^{-\frac{Kt}{m}} + \frac{mg}{K}$$

A $t = 0 \Rightarrow V = V_0 \quad \Leftrightarrow \quad V_0 = \lambda e^{-0/m} + \frac{mg}{K} = \lambda . 1 + mg/K$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = V_0 - mg/K$$

Donc : $\boxed{V = \left(V_0 - \frac{mg}{K}\right) e^{-Kt/m} + \frac{mg}{K}}$

$$* \quad z = \int V\,dt = \int\left[\left(V_0 - \frac{mg}{K}\right) e^{-\frac{Kt}{m}} + \frac{mg}{K}\right] dt$$

$$= \int\left(V_0 - \frac{mg}{K}\right) e^{-\frac{Kt}{m}}\,dt + \int \frac{mg}{K}\,dt + cte.$$

$$= -\frac{m}{K}\left(V_0 - \frac{mg}{K}\right) e^{-\frac{Kt}{m}} + \frac{mg}{K}t + cte$$

En $t = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -\frac{m}{K}\left(V_0 - \frac{mg}{K}\right) + \frac{mg}{K} + cte$

$$cte = \frac{m}{K}\left(V_0 - \frac{mg}{K}\right)$$

Alors : $z = -\frac{m}{K}\left(V_0 - \frac{mg}{K}\right) e^{-\frac{Kt}{m}} + \frac{mg}{K}t + \frac{m}{K}\left(V_0 - \frac{mg}{K}\right)$

$$\boxed{z = \frac{m}{K}\left(V_0 - \frac{mg}{K}\right)\left[1 - e^{-\frac{Kt}{m}}\right] + \frac{mg.t}{K}}$$

$$\boxed{\gamma = dV/dt = -t/m\left(V_0 - \frac{mg}{K}\right) e^{-Kt/m}}$$

ETUSUP .com

2/ La vitesse limite :

$$\lim_{t\to\infty} v = \lim_{t\to\infty} \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

A partir d'un certain moment, le mouvement devient uniforme, et sa vitesse ne dépend que sa masse et la résistance de l'air

EXERCICE 7 (CC1 07/08)

Partie A :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

Or : $r = A(1+\cos\omega t) \Rightarrow \dot{r} = -A\omega\sin\omega t = \frac{dr}{dt}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = -A\omega\sin\omega t\,\vec{e_r} + A\omega(1+\cos\omega t)\vec{e_\theta}}$$

Au point $\theta = 0$, on a : $v = -A\omega\underbrace{\sin(0)}_{0}\cancel{\vec{e_r}} + A\omega(1+\cos 0)\cancel{\vec{e_\theta}}$

$$= 0 + A(1+1)$$

$$= 2A$$

$$\Rightarrow \vec{v} = 0 + 2A\omega\vec{e_\theta}$$

$$\|v\| = \sqrt{A^2\omega^2\sin^2\omega t + A^2\omega^2(1+\cos\omega t)^2}$$

$$= \sqrt{A^2\omega^2\sin^2\omega t + A^2\omega^2(1+2\cos\omega t+\cos^2\omega t)}$$

$$= \sqrt{A^2\omega^2(\sin^2\omega t + 2\cos\omega t + 1 + \cos^2\omega t)}$$

$$= \sqrt{A^2\omega^2(2\cos\omega t + 1 + 1)} = \sqrt{A^2\omega^2 2\underbrace{(\cos\omega t + 1)}_{=r}}$$

$$= \sqrt{A\omega^2 2r} \qquad [r = A(1+\cos\omega t)]$$

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \omega\sqrt{A2r}}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{d(A\omega\sin\omega t)}{dt}\vec{e_r} + (-A\omega\sin\omega t)\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \frac{d(A\omega(1+\cos\omega t))}{dt}\vec{e_\theta}$$

$$+ A\omega(1+\cos\omega t)\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$

$$= -A\omega^2\cos\omega t\,\vec{e_r} - A\omega^2\sin\omega t\,\vec{e_\theta} - A\omega^2(\sin\omega t)\vec{e_\theta}$$

$$- A\omega^2(1+\cos\omega t)\vec{e_r}$$

$$= -A\omega^2(\cos\omega t\,\vec{e_r} + \sin\omega t\,\vec{e_\theta} + \sin\omega t\,\vec{e_\theta} + (1+\cos\omega t)\vec{e_r})$$

$$= -A\omega^2[(1+2\cos\omega t)\vec{e_r} + 2\sin\omega t\,\vec{e_\theta}]$$

$$\vec{\gamma} = -A\omega^2(1+2\cos\omega t)\vec{e_r} - 2A\omega^2\sin\omega t\,\vec{e_\theta}$$

ETUSUP .com

Partie B

1/ $\Sigma \vec{F} = m\vec{\gamma} = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} \begin{cases} -mA\omega^2(1+\cos\omega t) \\ -2mA\omega^2 \sin\omega t \end{cases}$

$P = \begin{cases} -mA \ldots \\ \ldots \end{cases} \begin{cases} -A\omega \sin\omega t \\ A\omega(1+\cos\omega t) \end{cases}$

$P = -mA^2\omega^3 \sin\omega t$

3/ $\delta W = P\,dt$

$W = \int P\,dt = -mA^2\omega^3 \int \sin\omega t\,dt = \cancel{\ldots}$?

$\vec{W} = mA^2\omega^3 \int \sin\omega t\,dt$

On sait que $\theta = \omega t$ et on a $\frac{d\theta}{dt} = \omega \Leftrightarrow$ donc on a: $dt = \frac{d\theta}{\omega}$

$\Rightarrow W = mA^2 \frac{\omega^3}{\omega} \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta$

$W = mA^2\omega^2[-\cos\theta]_0^{\pi} = mA^2\omega^2(-(-1)-(+1)) =$

$= -2mA^2\omega^2$

En utilisant la variation de l'énergie cinétique

$\Delta E_c = \Sigma W$

$\frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2 = \Sigma W$

Avec V_f quand $\theta = \pi/2$ et V_i quand $\theta = 0$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mV^2(\pi/2) - \frac{1}{2}mV^2(0) = \Sigma W$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m[(A\omega)^2 + (A\omega)^2] - \frac{1}{2}m(2A\omega)^2$?

$= -2mA^2\omega^2$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..